Αριθμητική Ανάλυση — No. 1 — Date 13/01/2020

Άσκηση: Να μετατραπεί ο αριθμός $(152.6640625)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα

	Υπόλοιπο	Πηλίκο
152 : 2	0	76
76 : 2	0	38
38 : 2	0	19
19 : 2	1	9
9 : 2	1	4
4 : 2	0	2
2 : 2	0	1
1 : 2	1	0

$(152)_{10} = 10011000$

$0.6640625 \times 2 = 1.328125 \quad a_1 = 1$

$y_2 = 0.328125$

$y_1 \times 2 = 0.65625$

$a_2 = 0 \quad y_3 = 0.65625$

$y_2 \times 2 = 1.3125$

$a_3 = 1 \quad y_4 = 0.3125$

$y_3 \times 2 = 1.25$

$a_4 = 1 \quad y_5 = 0.25$

$y_5 \times 2 = 0.5 \qquad a_{-6} = 0 \quad y_6 = 0.5$

$y_6 \times 2 = 1.0 \qquad a_{-7} = 1 \quad y_7 = 0$

$(152.6640625)_{10} = (10011000.1010101)_2$

Άσκηση: Να βρεθεί το αποτέλεσμα των πράξεων $x \cdot y + z$, όπου $x = 16.6$, $y = 0.814$, $z = 1.27$ αν εκτελεσθούν στην μηχανή $M(10, 2, -10, 10)$

Λύση

$w = fl((fl(x) \cdot fl(y)) + fl(z))$

$fl(x) = 0.17 \cdot 10^2 = 17$, $fl(y) = 0.81$, $fl(z) = 0.13 \cdot 10^1 = 1.3$

$fl(x) \cdot fl(y) = 13.77$, $fl(fl(x) \cdot fl(y)) = 0.14 \times 10^2 = 14$

$fl(fl(x) \cdot fl(y)) + fl(z) = 14 + 1.3 = 15.3$

$w = 0.15 \times 10^2 = 15$

Άσκηση: Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - x - 2 = 0$

Να αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος του Newton συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [1, \infty)$ στη μοναδική ρίζα $x^* \in (0, \infty)$. Να γίνει εφαρμογή του αλγορίθμου για την προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 2 δ.ψ. κ' $x_0 = 1$

Λύση

$f(1) = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$

$f''(x) = 6x > 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$

Ισχύει το Θ. Ολικής σύγκλισης $\Rightarrow$ Η μέθοδος Newton συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $x^* \in [1, \infty)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - x_n - 2}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n + 2}{3x_n^2 - 1}$$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{2 - 1 + 2}{3 \cdot 1^2 - 1} = 2 \qquad |x_1 - x_0| = 1 > 0.005$

$x_2 = \frac{2 \cdot 2^3 + 2}{3 \cdot 2^2 - 1} = \frac{16}{11} \approx 1.6364 \qquad |x_2 - x_1| = 0.3636 > 0.005$

$x_3 = \frac{2 \cdot x_2^3 + 2}{3 \cdot x_3^2 - 1} = 1.5304 \qquad |x_3 - x_2| = 0.106 > 0.005$

$x_4 = \frac{2 \cdot x_4^3 + 2}{3x_4^2 - 1} \approx 1.52144 \qquad |x_4 - x_3| = 0.009 > 0.005$

$x_5 = \frac{2 \cdot x_5^3 + 2}{3x_5^2 - 1} \approx 1.52138 \qquad |x_5 - x_4| = 0.00006 < 0.005$

$x^* = 1.521$

Άσκηση:

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{2} = 0$. (i) Να αποδειχθεί ότι έχει μια μοναδική ρίζα $x^* \in (0, \pi)$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος $x_{n+1} = \sin x_n + \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ συγκλίνει $\forall x_0 \in [0, \pi]$

(i) $f(0) = \frac{1}{2} > 0$, $f(\pi) = -\pi + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \exists x^* \in [0, \pi)$

$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ είναι φθίνουσα

$\Rightarrow$ η x^* είναι μοναδική

$\varphi(x) = \sin x + \frac{1}{2}$

$\varphi'(x) = \cos x$, $|\varphi'(x)| = |\cos x| \leq 1$, $\forall x \in [0, \pi] \rightarrow$ δεν είναι συστολή.

$\varphi'(x) = \cos x \begin{cases} \geq 0, & x \in [0, \pi/2] \\ < 0, & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$, $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\varphi(0) = \sin(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\varphi(\pi) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\varphi([0, \pi]) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \subset [0, \pi]$ καλώς ορισμένη

$|\varphi'(x)| = |\cos x| < 1 \quad \forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \rightarrow$ συστολή στο $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
συγκλίνει $\forall x_0 \in [0, \pi]$

Να ορισθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ με την LU παραγοντοποίηση

$$\begin{array}{cccccc} & \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \underline{1} & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 \\ & & & \underline{1} & 1 \\ 1 & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{array}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = L^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow LY = I$$

$$Y^T = (L^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$UX = Y : \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T = X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$